Du travail algébrique

- Le collège en action - Projets en cours - mathématiques - Pour la classe - Nombres - De l'algébre -

Date de mise en ligne : samedi 31 octobre 2015

Le travail algébrique consiste essentiellement à transformer une
phrase algébrique en une phrase équivalente tel que le passage de l'une à l'autre peut être justifié par un résultat élémentaire de l'algèbre.

Par exemple,

A = 5 x (3 + 7)

A = 5 x 10

A = 50

Le texte ci-dessus comporte trois phrases équivalentes.

La première affirme que le nombre A est égal au calcul 5 x (3 + 7) : c'est l'énoncé.

On peut justifier le passage de la première à la deuxième phrase ainsi :

- Règle : Les parenthèses indiquent qu'il faut multiplier 5 par la somme de 3 et de 7.

- Résultat : 3 + 7 = 10

donc la phrase « **A = 5 x (3 + 7)** »
est équivalente à la phrase « **A = 5 x 10** »

On peut justifier le passage de la deuxième à la troisième phrase à l'aide d'un seul résultat :

- Résultat : 5 x 10 = 50

donc la phrase « **A = 5 x 10** »
est équivalente à la phrase « **A = 50** »

Le texte ci-dessus est un texte dont le but semble être de calculer l'expression 5 x (3 + 7). On peut imaginer que l'on cherche le résultat de ce calcul pour répondre à un problème du genre « Abel a acheté 5 paquets contenant chacun 3 bonbons bleus et 7 bonbons roses. Combien a-t-il de bonbons en tout ? ».

Pour mener ce calcul, on pourrait écrire quelque chose comme :

5 x (3 + 7)

3 + 7 = 10

5 x 10 = 50

Malgré la justesse des calculs et malgré le résultat final correct, on peut remarquer l'absence de structure :

- les phrases ne sont pas de la même nature (la première n'est pas une égalité)-
le lien entre chacune est peu évident sans le contexte (les deux dernières phrases semblent être des calculs indépendants l'un de l'autre comme on pourrait en trouver sur un cahier d'élève à qui le professeur aurait dicté une série de calculs)

Au contraire, la forme :

A = 5 x (3 + 7)

A = 5 x 10

A = 50

offre une structure régulière :

- Toutes les phrases sont de la même nature (ce sont des égalités qui ont comme « sujet » le nombre A dont on va suivre les « aventures » étape par étape)

- Comme il est dit plus haut, le passage d'une phrase à la suivante ne peut pas être algébriquement contesté par le lecteur car un ou plusieurs résultats élémentaires de l'algèbre en assurent la justesse.

Remarque :
si l'on « saute » l'étape intermédiaire, on obtient le texte à deux phrases suivant :

A = 5 x (3 + 7)

A = 50

Si le but est de trouver la réponse au problème ci-dessus, ces deux phrases (la première qui réduit les éléments du problème à l'expression algébrique qui lui correspond et la deuxième qui donne la solution) semblent bien suffisantes.

Mais si le but est de montrer à son lecteur, en général un professeur qui cherche à vérifier qu'un certain nombre de réflexes algébriques sont acquis, il vaudra bien mieux détailler les étapes afin de montrer sa maîtrise de l'exercice (le texte à deux phrases ci-dessus a très bien pu être mené à l'aide de la calculatrice et la maîtrise de la règle des parenthèses n'est peut-être pas acquise).

Il s'agit donc, comme dans le premier article de cette série, d'un jeu entre l'écrivain et le lecteur, l'écrivain devant se demander en permanence : « Quel texte, mon lecteur attend-il ? Que veut-il vérifier en le lisant ? ».

C'est évidemment tout l'enjeu des séquences pédagogiques que de se mettre d'accord sur la nature des textes attendus.

Par exemple, en 3ème, on pourra considérer que la maîtrise de la règle des parenthèses est acquise et que telle étape pourra être « sautée » (d'autant plus que les textes à produire en 3ème nécessitent souvent de nombreuses étapes montrant qu'un grand nombre de résultats ; règles ou théorèmes sont acquis et par conséquent, on pourra économiser du temps et de l'encre à appliquer plusieurs des résultats les plus simples en une seule étape). Au contraire, en 5ème, la maîtrise de la règle des parenthèses étant une compétence en cours d'acquisition, les étapes relevant de cette règle seront détaillées, soit pour montrer au lecteur la maîtrise de la règle soit pour qu'il puisse deviner dans une étape mal réussie ce qui pose problème et ainsi mieux conseiller son élève pour le prochain essai (une étape « sautée » ne dit rien de ce qui n'a pas été bien compris).

Exemple (un peu difficile et qui peut être « sauté » en première lecture) :

En 5ème, il pourrait être demandé de réduire l'expression :

$A = 20 x2 + 12 x - 10 x - 6 - 7 x - 8$

Les étapes attendues pourraient alors être

$A = 20 x2 + 12 x - 10 x - 7 x - 8 - 6$

(l'élève montre qu'il maîtrise la commutativité dans une suite d'additions et de soustractions et qu'il sait regrouper les termes de même « unité » (voir ***de l'addition***))

On pourrait même exiger qu'il écrive ensuite l'étape suivante :

$A = 20 x2 + (12 - 10 - 7) x - 8 - 6$

ce qui montrerait sa maîtrise formelle du théorème de distributivité (voir ***du théorème de distributivité***). La discussion en classe permettra, comme il a été dit plus haut, de préciser si ce niveau de maîtrise est attendu.

Enfin, l'étape finale (la forme réduite de l'expression A) est :

A
$= 20 x2$
$- 5 x$
$- 14$

Le
texte complet attendu est donc

soit :

$A = 20 x2 + 12 x - 10 x - 6 - 7 x - 8$

$A = 20 x2 + 12 x - 10 x - 7 x - 8 - 6$

$A = 20 x2 + (12 - 10 - 7) x - 8 - 6$

A = 20 *x*2 - 5 *x* - 14

soit :

A = 20 x2 + 12 x - 10 x - 6 - 7 x - 8

A = 20 x2 + 12 x - 10 x - 7 x - 8 - 6

A = 20 x2 - 5 x - 14

En 4ème, il pourrait être demandé de développer et réduire l'expression :

A
= (4 *x*
- 2)(5 *x*
+ 3) - (7 *x*
+ 8)

C'est
un tout autre niveau de maîtrise algébrique qui va lui permettre
d'écrire :

A
= (4 *x*
- 2)(5 *x*
+ 3) - (7 *x*
+ 8)

A
= 20 *x*2
+ 12 *x*
- 10 *x*
- 6 - 7 *x*
- 8

(ce
n'est pas l'objet de cet article que d'expliquer les nombreuses
opérations mentales qui ont conduit à ce résultat)

Le
lecteur-professeur cherche à vérifier que ce travail-là est maîtrisé et tendra toute son attention sur cette étape-là. Ensuite, pour la réduction, l'élève pourra « sauter » une étape sans que le professeur y voit un problème.

Ce
qui donnerait :

A
= (4 *x*
- 2)(5 *x*
+ 3) - (7 *x*
+ 8)

A
= 20 *x*2
+ 12 *x*
- 10 *x*
- 6 - 7 *x*
- 8

A
= 20 *x*2
- 5 *x*
- 14

Revenons
à notre expression de départ : A = 5 x (3 + 7)

et
considérons le texte suivant :

A
= 5 x (3 + 7)

A = 100 :
2

Ce
texte n'est pas faux car si A est égal à « 5 x (3 + 7) », A est aussi égal à « 100 : 2 » car ces deux calculs ont le même résultat (50).

Ce

texte n'est pas faux mais le lecteur restera largement perplexe sur l'intention de l'écrivain (la logique qui permet de passer d'une ligne à l'autre semble inaccessible).

A moins que la consigne soit :

A = 5 x (3 + 7)

Trouve une autre expression donnant le même résultat en n'utilisant que les chiffres 0 ; 1 et 2

Alors les textes :

A = 5 x (3 + 7)

A = 100 : 2

ou

A = 5 x (3 + 7)

A = (1 + 2 + 2) x 10

sont des textes parfaitement adaptés à l'exercice imposé.

Mais nous sommes là devant un exercice très peu commun et qui, contrairement à ce que sa forme pourrait laisser supposer, ne fait pas exactement partie du travail algébrique décrit dans cet article (il s'agirait plutôt ici d'un jeu sur les nombres dans lequel le travail algébrique est peu présent - en dire plus nous entraînerait trop loin).

Revenons donc, pour terminer, sur le travail algébrique proprement dit.

Supposons

que la consigne soit :

A
= 5 x (3 + 7)

Calculer
A ***en utilisant le théorème de distributivité***.

Ici, il ne
s'agit visiblement plus seulement de calculer pour trouver le résultat mais il y a une contrainte sur le travail algébrique à effectuer : il faut utiliser, lors du passage d'une phrase à l'autre, le théorème de distributivité.

Le texte :

A = 5 x (3
+ 7)

A
= 5 x 10

A
= 50

ne
convient pas car parmi les résultats, règles ou théorèmes qu'il utilise pour justifier le passage d'une ligne à l'autre, on ne trouve pas le théorème de distributivité.

Le
théorème de distributivité nécessite de reconnaître des formes, c'est-à-dire des structures particulières à l'intérieur d'une expression (voir ***du théorème de distributivité***) .

Dans
notre cas, on reconnaît que « 5 x (3 + 7) » est de la forme « a x (b + c) » et le théorème de distributivité affirme que :

Pour
n'importe quels nombres a, b et c, l'égalité suivante est toujours vraie :

a
x (b + c) = (a x b) + (a x c)

Donc
pour a = 5 ; b = 3 et c = 7, on a :

5
x (3 + 7) = (5 x 3) + (5 x 7)

Il
est donc probablement attendu le texte suivant :

A = 5 x (3
+ 7)

A = (5 x 3)
+ (5 x 7)

A = 15 + 35

A = 50

En
regardant de près les résultats ; règles et théorèmes
implicites qui justifient le passage d'une ligne à l'autre, cela
donne :

La
première phrase affirme que le nombre A est égal au calcul 5
x (3 + 7) : c'est l'énoncé.

On
peut justifier le passage de la première à la deuxième phrase
ainsi :

-
Théorème de distributivité : 5 x (3 + 7) =
(5 x 3) + (5 x 7)

donc
la phrase « **A = 5 x (3 + 7)** »
est équivalente à la phrase « **A**
= (5 x 3) + (5 x 7) »

Ca
y est, le théorème de distributivité a été utilisé et il n'y a
plus d'autres contraintes dans l'énoncé, ce qui signifie que nous
pouvons choisir le chemin que l'on veut pour terminer le calcul.

Ici,
on a choisi d'utiliser la règle des
parenthèses pour justifier le passage de
la deuxième à la troisième phrase.

-
Règle : Les parenthèses
indiquent que les calculs prioritaires sont « (5 x 3) »
et « (5 x 7) ».

-
Résultat 1 : 5 x 3 = 15

-
Résultat 2 : 5 x 7 = 35

donc
la phrase « **A = (5 x
3) + (5 x 7)** » est équivalente à la
phrase « **A = 15
+ 35** »

Enfin,
on termine le calcul :

-
Résultat : 15 + 35 = 50

donc
la phrase « **A = 15
+ 35** » est équivalente à la
phrase « **A = 50** »

C'est
très probablement ce que le professeur attendait et la discussion en
classe a dû permettre de préciser cela.

Notons
que l'on aurait pu mener le calcul ainsi (même si ce n'est
probablement le travail attendu) :

A = 5 x (3
+ 7)

A = 5 x 10

A = 5 x (8
+ 2)

A = (5 x 8)
+ (5 x 2)

A
= 40 + 10

A
= 50

Détails :

**A = 5 x
(3 + 7)**

Règle des
parenthèses et résultat : 3 + 7 = 10

**A = 5 x
10**

Résultat :
10 = 8 + 2 et utilisation de la règle des parenthèses

Mais pourquoi
remplacer « 10 » par « (8 + 2) » plutôt
que terminer le calcul ?, se demande-t-on.

Tout
simplement parce qu'en terminant le calcul, on n'aurait pas utiliser
le théorème de distributivité imposé. Puisque « 5 x 10 »
n'est pas une forme (structure de calcul) permettant d'utiliser le
théorème de distributivité, on la remplace par l'expression
équivalente « 5 x (8 + 2) » qui, elle, est une forme
permettant l'utilisation du théorème.

On aurait
pu tout aussi bien la remplacer par « 5 x (6 + 4) » ou
« 5 x (7,4 + 2,6) » puisqu'on y reconnaît la structure a
x (b + c).

On aurait
même pu la remplacer par « 5 x (12 - 2) » ou « 5
x (14 - 4) » qui sont aussi des structures permettant

l'utilisation du théorème.

Ou encore
« (3 + 2) x 10 » en décomposant, cette fois-ci le nombre
5 plutôt que le nombre 10.

Ici, on a
donc choisi, un peu par hasard, l'expression « 5 x (8 + 2) »

donc que la
phrase « A = 5 x 10 » est équivalente à la phrase « A
= 5 x (8 + 2) »

**A = 5 x
(8 + 2)**

Utilisation
du théorème de distributivité

**A = (5 x
8) + (5 x 2)**

Règle des
parenthèses et résultats : 5 x 8 = 40 et 5 x 2 = 10

**A
= 40 + 10**

Résultat :
40 + 10 = 50

**A
= 50**

